E.N.S.I. 1985 Chimie Sud

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

I

A tout $n \in \mathbb{N}$ on associe les fonctions y_n et z_n définies, pour $x \in [-1, +1]$ par :

$$y_n(x) = \cos(n \operatorname{Arc}\cos x) \qquad \text{et} \qquad z_n = \sin(n \operatorname{Arc}\cos x)$$

On désignera par C_n et Γ_n respectivement les courbes représentatives des graphes de y_n et z_n dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$.

a. Étudier la parité de y_n et de z_n suivant la valeur de n.

Calculer $y_n(0)$, $z_n(0)$, $y_n(1)$, $z_n(1)$.

b. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, y_n et z_n sont dérivables sur $]-1, +1[$. Donner l'expression de $y_n'(x)$ en fonction de x et $z_n(x)$, ainsi que l'expression de $z_n'(x)$ en fonction de x et $y_n(x)$.

c. Les rapports :

$$\frac{\cos n\theta - 1}{\cos \theta - 1} \qquad \text{et} \qquad \frac{\sin n\theta}{\cos \theta - 1} \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

ont-ils une limite finie lorsque θ tend vers 0 ?

Étudier la dérivabilité de y_n et z_n aux points $x = 1$ et $x = -1$.

d. Dans chacun des trois cas particuliers suivants :

$$n = 1, \qquad n = 2, \qquad n = 3$$

1. Calculer les racines des équations $y_n(x) = 0$ et $z_n(x) = 0$ appartenant à l'intervalle $[0, 1]$. Déterminer l'ensemble A_n des valeurs de $x \in [0, 1]$ pour lesquelles $y_n(x) \geqslant 0$, ainsi que l'ensemble B_n des valeurs de $x \in [0, 1]$ pour lesquelles $z_n(x) \geqslant 0$.

2. Étudier les variations de $y_n(x)$ et de $z_n(x)$ lorsque x parcourt l'intervalle $[0, 1]$.

e. Tracer sur un même graphique :

1° Les courbes C_0, C_1, C_2, C_3 ;

2° Les courbes Γ_0, Γ_1, Γ_2, Γ_3,

l'unité de longueur sur chacun des deux axes étant 10 cm.

Donner une définition géométrique de C_n et Γ_n pour $n = 0$ et $n = 1$.

f. On désigne par a_n la plus grande racine de l'équation $y_n(x) = 0$ sur $[0, 1]$.

Pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$, calculer, en cm², l'aire du domaine borné délimité par le segment de Ox de bornes a_n et 1, la droite $x = 1$ et par C_n.

II

a. Exprimer $y_0(x)$ et $z_0(x)$ ainsi que $y_1(x)$ et $z_1(x)$ sous une forme ne faisant pas intervenir de fonction trigonométrique.

b. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_{n+2}(x) + y_n(x)$ en fonction de x et $y_{n+1}(x)$, puis $z_{n+2}(x) + z_n(x)$ en fonction de x et $z_{n+1}(x)$.

c. Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, y_n est une fonction polynôme et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n(x)$ peut s'exprimer sous la forme :

$$z_n(x) = \sqrt{1 - x^2}\, g_n(x)$$

où g_n est une fonction polynôme. Préciser les degrés de y_n et g_n.

d. Retrouver ces derniers résultats en posant Arc cos $x = \theta$ et en utilisant les formules de Moivre.

e. Intégrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 v}{d\theta^2} + n^2 v = 0$$

où v est la fonction inconnue et θ la variable.

En déduire que y_n et z_n sont deux solutions sur $]-1, +1[$ de l'équation différentielle :

$$(1 - x^2)\frac{d^2 y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2 y = 0$$

et donner son intégrale générale sur $]-1, +1[$.

III

Dans la suite du problème, on désigne par $C_\infty(-1, +1)$ l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et indéfiniment dérivables sur $]-1, +1[$.

a. Soit n un entier naturel, et f la fonction des trois variables réelles x, α, α' définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(x, \alpha, \alpha') = (1 - x^2)\,\alpha' + (2n - 1)\,x\,\alpha$$

Montrer qu'en associant à toute fonction $y \in C_\infty(-1, +1)$ la fonction $Y : x \longmapsto Y(x) = f(x, y(x), y'(x))$, on définit un endomorphisme de $C_\infty(-1, +1)$, que l'on désignera par F. Pour toute fonction g appartenant à cet espace, l'équation $F(y) = g$ est une équation différentielle linéaire du 1er ordre, que nous écrirons :

$$f(x, y, y') = g(x)$$

b. Intégrer l'équation différentielle :

$$f(x, y, y') = 0$$

et en déduire l'existence d'une fonction $u \in \text{Ker}\,(F)$ telle que $u(x) = 1$ pour $x = 0$. Expliciter $u(x)$ pour tout $x \in]-1, +1[$.

c. Soit une fonction $y \in C_\infty(-1, +1)$ et $Y = F(y)$ son image par F. Vérifier que, pour tout entier $k \geqslant 1$ et pour tout $x \in]-1, +1[$ la dérivée k^e $Y^{(k)}(x)$ de Y au point x peut s'exprimer comme une combinaison linéaire (que l'on explicitera) des dérivées $y^{(k+1)}(x)$, $y^{(k)}(x)$, $y^{(k-1)}(x)$, dont les coefficients dépendent de x. En déduire que, pour tout entier $p \geqslant 1$:

$$u^{(2p)}(0) = (-1)^p\, 1 \times 3 \times 5 \ldots \times (2p-1)(2n-1)(2n-3) \ldots (2n-2p+1)$$

et donner la valeur de $u^{(2p-1)}(0)$. Préciser la valeur de $u^{(2n)}(0)$.

d. Intégrer sur l'intervalle $]-1, +1[$ l'équation différentielle $f(x, y, y') = \lambda y$, (λ constante réelle non nulle).

Pour quelles valeurs de λ cette équation a-t-elle des solutions polynômes ? Expliciter, pour chacune des valeurs de λ répondant à la question, le polynôme solution P_λ tel que $P_\lambda(0) = 1$.

e. On pose, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $(1+x)^{n+p} \times (1-x)^{n-p-1} = \varphi_{2p+1}(x)$.

Calculer, pour tout $x \in]-1, +1[$, la somme :

$$\sum_{p=-n}^{n-1} C_{2n-1}^{n+p}\, \varphi_{2p+1}(x).$$

f. Montrer qu'il est possible de déterminer de manière unique les constantes a_p pour que la fonction

$$\varphi : x \longmapsto \varphi(x) = \sum_{p=-n}^{n-1} a_p\, \varphi_{2p+1}(x)$$

soit solution de l'équation différentielle :

$$f(x, y, y') = 1$$

et donner leurs valeurs.

g. Vérifier, en l'intégrant par la méthode élémentaire, l'existence de solutions polynomiales pour cette équation différentielle.